Oživenie logicizmu[1]

František Gahér

(ČO BY MAL/MOHOL FILOZOF VEDIEŤ O LOGICIZME)

A. Čo by *mal* zainteresovaný filozof, ktorý sa vyjadruje k idey logicizmu, vedieť o logicizme, o jeho dejinách a aktuálnom stave

1. Logicizmus je doktrína, podľa ktorej sa matematické pravdy dajú zdôvodniť výlučne logickými postupmi vychádzajúc výlučne z logických právd.
2. Prvú ucelenú verziu logicizmu predložil Gottlob Frege na základe prvého systému predikátovej logiky najprv v *Begriffsschrift* 1879, potom s podrobným filozofickým zdôvodnením bez formalizmu v *Die Grundlagen der Arithmetik* (GL)1884 a napokon v *Grundgesetze der Arithmetik I – II* (GGA)1893 – 1903. Vo svojom najfilozofickejšom diele – v *Grundlagen* ukázal, že číselné pravdy nie sú syntetické, ani aposteriórne, že Číslo nemá geometrickú povahu, že Číslo nie je vlastnosťou vonkajších vecí, ani nie je niečim subjektívnym, nie je ani množinou v zmysle súboru či agregátu. Vysvetlil, prečo Jednotku musíme odlišovať od čísla Jeden, prečo čas nie základom pojmu Čísla, prečo Čísla nemôžeme tvoriť a napokon prečo Číslo nie znakom či symbolom.
3. Bertrand Russell našiel v technickom dopracovaní Fregeho logicizmu (GGA I) logický spor a aby sa mu vyhol, vypracoval druhú ucelenú verziu logicizmu v podobe rozvetvenej teórie typov v *Principia Mathematica* 1910 – 13 (RTT).
4. O dvoch axiómach RTT boli vyslovené pochybnosti, či sú pravdami logiky – o axióme nekonečna a axióme reducibility. Russell nevydržal tlak kritiky (najmä Quina) a neskôr rezignoval na program logicizmu.
5. Všeobecne sa rozšíril názor, že už nikto viac nebude nasledovať Fregeho na jeho ceste logicizmu, jednoducho, že logicizmus je „mŕtvy“ [Dummett 1977].
6. V druhej polovici 20. storočia dochádza postupne k rehabilitácii Fregeho projektu, ale už ako matematického podujatia (Parsons 1965, Burgess 1984, Boolos 1987, Heck 1993). Axióma nekonečna sa ukázala odvoditeľná. Jedinou problematickou pravdou, ktorá bola potrebná na odvodenie aritmetiky z logiky, je Fregeho definícia kardinality (FDC) – nazývaná aj (nie celkom oprávnene) *Humov princíp*.

   (FDC) Číslo prislúchajúce pojmu F = Číslo prislúchajúce pojmu $G \leftrightarrow_{\mathrm{df}} F \approx G$.

   kde $\approx$ je vzťah rovnopočetnosti či kardinality, ktorý je vzájomne jednoznačným vzťahom ekvivalenčného typu (reflexívny, symetrický a tranzitívny).
   Vyjadrené v predikátovej logike druhého rádu (PL2):

   (FDC*) $(\forall F)(\forall G)(N(F) = N(G) \leftrightarrow_{\mathrm{df}} F \approx G)$.

   Spomínaní skúmatelia považujú Fregeho definíciu kardinality za syntetickú pravdu, pretože hoci implikáciu *ak dva pojmy sú rovnopočetné, tak im prislúcha to isté číslo*, t.j.

   (FDC $_\beta$*) $(\forall F)(\forall G)(N(F) = N(G) \leftarrow F \approx G)$

   považujú za analytickú (logickú) pravdu a táto neviedla k Russellovej antinómii, predsa implikáciu *ak dvom pojmom prislúcha to isté číslo, tak sú rovnopočetné*, t.j.

   (FDC $_\alpha$*) $(\forall F)(\forall G)(N(F) = N(G) \rightarrow F \approx G)$

---

[1] Táto práca vznikla v rámci vedeckého projektu *Sémantická analýza prirodzeného jazyka a aplikácie logiky* podporeného grantom VEGA MŠ SR č. ... Niektoré časti práce boli publikované v práci [Gahér 2001].

považujú za syntetickú (mimologickú) pravdu špecifickú práve pre matematiku.
7. Tretiu verziu logicizmu v podobe netypovej intenzionálnej logiky predložil George Bealer [*Quality and Concept* 1982] – ide o prvé oživenie logicizmu po tom, ako sa rozšíril názor, že nie je ničím iným, ako iba historickou ruinou.
8. Štvrtú verziu logicizmu predložil Crispin Wright [*Frege´s Conception of Numbers as Objects* 1983] - v rámci PL2 predstavil rekonceptualizáciu Fregeho projektu. Fregeho definíciu kardinality považuje za analytickú (logickú) pravdu.
9. Tichého idea konštrukcie ako zloženej entity *sui generis* umožňuje „ospravedlniť" axiómu reducibility a opraviť výklad premennej, čím otvára cestu k novej teoreticko-typovej rekonštrukcii projektu logicizmu. Tichého transparentná intenzionálna logika (TIL-ka) bola vypracovaná najmä na účely logicko-sémantickej analýzy prirodzeného jazyka, a preto predpokladá čísla už ako „hotové." Aby mohol byť na podobných ideách, z ktorých vychádza TIL-ka, rekonštruovaný logicizmus, musela by byť vybudovaná akási protologika – rozvetvená teória typov, v ktorej by pojem čísla a číselný rad prirodzených čísel bol logicky definovateľný.

B. Čo by *mohol* zainteresovaný filozof vedieť o logicizme

1. Cieľ logicizmu

Cieľom Fregeho logicizmu bola aplikácia *prísne vedeckej metódy v matematike*, ktorá *prekračuje* euklidovskú presnosť. Frege požadoval, aby:
1. axiómy ako nedokázateľné pravdy boli formulované v takom jazyku, v ktorom by sa všetko podstatné pre logické vyplývanie zachytilo a od ostatného obsahu výrazov prirodzeného jazyka (emocionálne zafarbenie, subjektívne prímesy) abstrahovalo, pričom by boli tieto axiómy vyjadrené tak prehľadne a bolo ich čo najmenej, aby sme zreteľne poznali, na čom spočíva celá stavba;
2. dôkazy odvodených právd z axióm boli bez akýchkoľvek medzier a aby sa nevychádzalo zo žiadnych tvrdení, ktoré nie sú explicitne uvedené v dôkaze. Nielen pre Euklida, ale aj pre celé obdobie matematiky, ktoré nemalo naporúdzi dostatočne vhodné a do detailov prepracované prostriedky logiky, ktoré rozvinuli až v modernej logike najmä práve Frege a Russell, je typická *„obsahová" axiomatizácia.* To znamená, že okrem i) *definícií technických termínov* sú formulované ii) *postuláty* – pravdy špecifické pre danú vednú oblasť a iii) *axiómy* (*common notiones*) – pravdy, ktoré sú spoločné všetkým vedám, ktoré sa neskôr považovali práve za *logické pravdy*. Všetko to bývalo formulované úplne alebo čiastočne v prirodzenom jazyku a trpelo jeho bežnými nedostatkami: neostrosťou a nepresnosťou výrazov či kruhovosťou definícií. Dokazovanie bolo „obsahové" v tom zmysle, že sa opieralo o logickú intuíciu bez vypracovania špeciálnej teórie dôkazu a často obsahovalo medzery či skoky a niekedy sa opieralo o zamlčaný, explicitne neformulovaný postulát.[2]

2. Motivácia

Neuspokojivá situácia vo vysvetľovaní matematiky: základné teorémy a odvodené formuly sa v učebniciach matematiky uvádzali bez dôkazu; zákony aritmetiky a poučky sa učili bifľovaním; povaha čísla zostávala nejasná.

3. Prevedenie

Frege buduje logicizmus ako systém *lingua charakteristica*, v ktorom všetko, čo je pre vyplývanie nepotrebné, bude zatlačené do úzadia a všetko, čo je z hľadiska vyplývania

[2] Pre prípad Euklidových *Elementov* sa čitateľ o tom môže presvedčiť napríklad v [Eves – Newson 1965, 37 – 47].

dôležité, bude zachytené jednoznačne a tak prehľadne, že takýto jazyk bude akoby myslieť za nás. Všetky predpoklady sa musia explicitne uviesť. Nemá to byť číri kalkul.

4. Osnova Fregeho logicizmu

4. 1. Čo je číslo?

Prvým cieľom bolo definovať pojem čísla. Jedným z motívov bolo postaviť matematiku na základy, ktoré svojou presnosťou prekonajú euklidovskú presnosť [GL § 2]. Druhým motívom bolo ukázať aritmetiku ako autonómnu disciplínu, ktorá je nezávislá od geometrie a kinematiky. V neposlednom rade to bol motív filozofický – odpovedať na otázku, či aritmetické pravdy sú apriórnej alebo aposteriórnej, syntetickej či analytickej povahy [§ 3][3]. Tento problém sa netýka obsahu matematických právd, ale ich ***zdôvodnenia***. Celé *Základy aritmetiky* sú najmä *o zdôvodnení* matematických súdov výlučne logickými pravdami a postupmi – ide o *aplikáciu logiky*.

4. 2. Kontextová definícia abstrakciou

Frege formuluje veľmi často citovaný princíp, ktorý býva spájaný – podľa nás chybne – s ideou kontextualizmu a ktorý môžeme nazvať princípom *jednotky autonómneho textu*:

(JAT) „Slová niečo znamenajú len vo vetnom kontexte“ [§ 62]

Frege ťaží aj z princípu skladobnosti významu zloženého výrazu:

(Kom) Význam zloženého výrazu je určený významami jeho podvýrazov.

O tento princíp sa opiera aj princíp *salva veritate* [§ 65], podľa ktorého výrazy majú totožné významy (*Bedeutung*), ak nahradením jedného podvýrazu vo výroku druhým získame výrok s rovnakou pravdivostnou hodnotou. Čiže význam výroku je spoluurčovaný významom každého jeho podvýrazu. Formuláciu princípu skladobnosti - tiež *funkcionality*, pretože ide o jednoznačné určenie významu zloženého výrazu významami jeho podvýrazov – by sme mohli ešte upresniť dodatkom: *a spôsobom zreťazenia podvýrazov, ktorý zachytáva spôsob spojenia jednotlivých významov*. Takže celý princíp skladobnosti by znel:

(Kom*) Význam zloženého výrazu je určený významami jeho podvýrazov a spôsobom zreťazenia týchto podvýrazov, ktorý zachytáva spôsob spojenia jednotlivých významov.

Kontext výroku ako základná významovo autonómna jednotka je tu zdôraznený aj preto, že na definovanie čísla potrebuje definíciu abstrakciou, ktorá patrí medzi *kontextové* definície, pretože nespĺňa požiadavku, kladenú na tradičnú definíciu, aby sa v definiende nevyskytoval žiadny výraz z definiensu. Dnes by sme povedali, že slová majú svoj základný – lexikálny význam i mimo vetného kontextu, ale iba vo vetnom kontexte môže byť jednoznačne určená „pozícia“ výrazu, a teda aj spôsob spojenia jeho významu s významami ostatných podvýrazov.

4. 3. Atribúty verzus vlastnosti pojmov: Čísla a existencia sú vlastnosti pojmov

V § 47 formuluje to, čo neskôr Tichý[4] v nepublikovanej práci označil ako *Parmenidov princíp*:

---

[3] Ak v odvolávke na literatúru uvedieme iba číslo paragrafu, tak pôjde o Fregeho *Die Grundlagen der Arithmetik.*

[4] [Materna – Štěpán 2000, 61].

(Parm) „Je úplne nemožné hovoriť o predmete bez toho, aby sme ho voľajako označili alebo pomenovali.“

Inak povedané, veta nemôže byť o predmete, ktorého meno sa v nej nevyskytuje.

> „Čísla sa prisudzujú iba pojmom, pod ktoré [pojmy] je zahrnuté vonkajšie a vnútorné, priestorové a časové, nepriestorové a nečasové.“

Zdôrazňuje, že vlastnosti pojmu sú odlišné od atribútov pojmu:

> „atribúty pojmu sú vlastnosti vecí, ktoré pod pojem spadajú, a nie pojmu. Tak »pravouhlý« nie je vlastnosťou pojmu »pravouhlý trojuholník«... Povedať „neexistuje pravouhlý rovnostranný trojuholník“ je to isté, ako povedať pojmu „pravouhlý rovnostranný trojuholník“ prislúcha číslo Nula. Čiže existencia je podobná číslu – je vlastnosťou pojmu – Pretože existencia je vlastnosť pojmu, ontologický dôkaz existencie Boha nedosiahne svoj cieľ [§ 53].

4. 4. Dva druhy vzťahu „*spadať pod*“: 1. predmet–pojem; 2. pojem–pojem

Okrem sémantického vzťahu podradenosti medzi pojmami Frege pracuje so sémantickým vzťahom *spadať pod*, ktorý mu umožňuje systémovo odlíšiť *atribúty* pojmu od *vlastností* pojmu. V § 53 *Základov* jasne odlišuje dva prípady „spadania.“ Vzťah „spadať pod“ pre prípad pojem–pojem odlišuje od prípadu „spadať pod“ pre prípad predmet–pojem: nejaký pojem spadá pod iný pojem – „takpovediac *pojem druhého rádu*“; napríklad pojem »všetky pojmy, pod ktoré spadá len Jeden predmet« má ako *atribút jedinosť*, avšak jedinosť nie je jeho vlastnosťou, pretože pojmov, pod ktoré spadá Jeden predmet, je veľa. Na druhej strane vlastnosťou prvorádových pojmov, ktoré pod tento pojem spadajú, je *vlastnosť jedinosť*, t. j. číslo, ktoré prislúcha takýmto pojmom (ich rozsahom), je číslo Jeden; pod tento pojem spadá napríklad pojem „Mesiac Zeme“, ale nie Mesiac, pretože nie je pojmom, ale predmetom. Frege však pripúšťa, že niekedy možno z atribútov pojmu usúdiť na jeho vlastnosti.

4. 5. Pojem Čísla verzus Cantorova mohutnosť

Aby Frege uskutočnil prvý krok programu logicizmu, musel definovať kardinálne číslo. Rok predtým publikoval Georg Cantor pozoruhodnú prácu, v ktorej zaviedol nekonečné Čísla. Prečo Frege nebol spokojný s touto cestou a vypracoval nové zdôvodnenie?

Súhlasí s Cantorom, že ani racionálne, ani iracionálne či komplexné čísla nie sú skutočné v tom zmysle, že by mohli pôsobiť na zmysly. Frege na rozdiel od Cantora pridáva, že ani prirodzené čísla nemôžu spôsobovať účinky, ktoré by mohli mať ako vzdialenejšie následky zmyslové vnemy, a preto ani len konečné Čísla nie sú skutočné [§ 85].

Odlišnosť vidí vo výbere terminológie – podľa Fregeho Cantor nevhodne nazýva (kardinálne) Číslo „mohutnosťou“ (*Mächtigkeit*) a termín „číslo“ spája iba s pojmom ordinálne číslo, čo je podľa neho odklon od bežného používania jazyka. To však vôbec nie je rozhodujúci dôvod nespokojnosti s Cantorovým postupom. Vecným dôvodom je najmä to, že Cantorovo vysvetlenie nespĺňa ideál matematickej presnosti a je poznačené psychologizmom:

> „ ... chýbajú presné definície nasledovania v postupnosti a *Cantorovho* čísla. Tak sa Cantor odvoláva na trochu tajomné „vnútorné nazeranie“ tam, kde sa mal snažiť podať dôkaz z definícií, čo sa aj dalo uskutočniť“ [§ 86].

Frege zrejme nemôže akceptovať to, že množina je „postavená“ na svojich prvkoch, zatiaľ čo podľa neho pojem je voči svojmu rozsahu primárny. Cantorovo skúmanie však vysoko hodnotí v tom, že „toto rozšírenie vydláždilo čisto aritmetickú cestu k vyšším nekonečne veľkým Číslam (mohutnostiam)“ (ibid.), čo bola úloha, ktorá čakala aj Fregeho na jeho ceste logicizmu a o ktorú sa pokúsil neskôr v diele *Základné zákony aritmetiky II*. Fregeho silnou námietkou proti teórii množín bolo, že teoreticko-množinové konštrukcie nám nedávajú žiadnu informáciu o aplikáciách reálnych čísel vo fyzike. Preto jeho projekt zdôvodnenia reálnych čísel vychádzal z pojmu merania veličín – nadväzuje na Gaussa, pričom veličiny nespája s predmetmi nejakého druhu, ale berie ich čo najvšeobecnejšie ako pojmy istého druhu, ktorých rozsahmi sú relácie. Reálne čísla koncipuje ako pomery medzi takýmito veličinami, t. j. ako *relácie medzi reláciami* [GGA II, § 162]. Rekonštrukciu jeho projektu odvodenia reálnych čísel urobil napríklad Simons [1995, 358 – 386].

Na definíciu kardinálneho čísla (mohutnosť množiny) v Cantorovej teórii množín sú potrebné tri pojmy: *množina*, *byť prvkom množiny* a *jedno-jednoznačné zobrazenie*. Logika sa naproti tomu podľa Fregeho zaoberá pojmami *pojem*[5] (*Begriff*) (sem patria vlastnosti (významy singulárnych predikátov) – pojmy v užšom slova zmysle), *spadať pod pojem*, resp. *rozsah pojmu* (extenzia pojmu) a *jedno-jednoznačný vzťah* (vzťah (*Beziehung*) je význam binárneho alebo viacárneho predikátu, t. j. je pojmom v širšom zmysle slova). Pripomeňme, že pojmy sú pre Fregeho funkcie zvláštneho druhu – predmetom priraďujú ako funkčnú hodnotu jednu z pravdivostných hodnôt, ktoré však samy sú tiež predmetmi.

Pri zdôvodnení pojmu Čísla využíva analógiu s pojmom Smeru. Smer D (*direction*) priamky a je totožný so smerom priamky b vtedy a len vtedy, keď sú rovnobežné (//):

(Def. smeru) $(\forall a)(\forall b)\ (D(a) = D(b) \leftrightarrow_{\mathrm{df}} a//b)$.

Čiže pochopenie pojmu smer priamky je založené na pochopení pojmu rovnobežnosti, nie naopak. Relácie rovnobežnosti a rovnopočetnosti sú tzv. *ekvivalenčné* relácie (reflexívne, symetrické a tranzitívne). Táto analógia medzi pojmom Čísla a pojmom Smeru bola dôležitá ešte v jednom ohľade. Smer priamky a sa vo vtedajšej geometrii chápal ako bod v nekonečne spojený s priamkou a. Takže z pojmu smeru sa stal zrazu predmet. To požadoval Frege aj pre prípad Čísla: Číslo ako vlastnosť pojmu sa malo stať Číslom ako autonómnym predmetom. Veď ako by sme mohli podľa Fregeho oprávnene hovoriť o číslach, prisudzovať im nejaké vlastnosti a hovoriť o ich vzťahoch, ak by neboli predmetmi. Takto sa aj smer, aj Číslo mohli chápať rovnako – ako predmety. Preto definuje Číslo ako rozsah druhorádového pojmu:

(Def. Čísla) **Číslo** (ktoré prislúcha) **pojmu *F*** je rozsahom pojmu „**byť rovnopočetný s pojmom *F***“.

V poznámke k tejto definícii v § 69 uvádza, že „namiesto *rozsah pojmu* by sme mohli povedať jednoducho *pojem*.“ Hneď však uvádza dve námietky:
Po prvé, už skôr povedal o čísle, že je predmetom, čo má byť podložené gramaticky: a) pri číselnom výraze sa používa určitý člen (/ten/ Jeden) a nemôžeme utvoriť množné číslo z číselného výrazu (/tie/ Jedná?); b) číslo tvorí v číselnom údaji iba časť predikátu.
Po druhé, dva pojmy môžu mať totožný rozsah bez toho, aby sa zhodovali.

Čiže Frege na jednej strane vedel, že pojem nie je redukovateľný bez zvyšku na svoj rozsah – v terminológii funkcií pojem ako Funkcia[6] nie je totožný s rozsahom pojmu, ktorý neskôr Frege nazval *priebehom hodnôt* (*Werthverlauf*). Toto rozlíšenie pojmu ako špeciálneho druhu Funkcií a jeho rozsahu sa zrejme týka Funkcií vôbec, a teda aj matematických Funkcií. Neskôr viackrát zdôraznil, že dve odlišné Funkcie môžu mať ten istý priebeh hodnôt, resp. to, čo sa tradične nazývalo a aj nazýva *graf funkcie*. Napríklad Funkcie 2.(x – 2) a 2x – 4 sú odlišné (odlišné sú už ich zadania), ale majú ten istý priebeh hodnôt (to isté zobrazenie), ten istý graf. Ak odlišnosť zadania zobrazení je vyjadrením odlišnej povahy Funkcií, tak Funkcia je čosi viac ako zobrazenie, viac ako číra funkcia. Ako však máme uchopiť tieto Funkcie, odlišné od funkcií ako priebehov hodnôt a od predmetov ako argumentov týchto zobrazení? Frege aj oveľa neskôr, keď mal viac ako vážny dôvod zmeniť svoje stanovisko v tejto otázke

[5] Cf. [Cmorej 2000].
[6] Výraz *Funkcia* s veľkým počiatočným písmenom budeme používať na označenie intuitívneho pojmu funkcia na rozdiel od výrazu *funkcia* ako zobrazenia (tabuľky usporiadaných dvojíc ⟨argument, funkčná hodnota⟩).

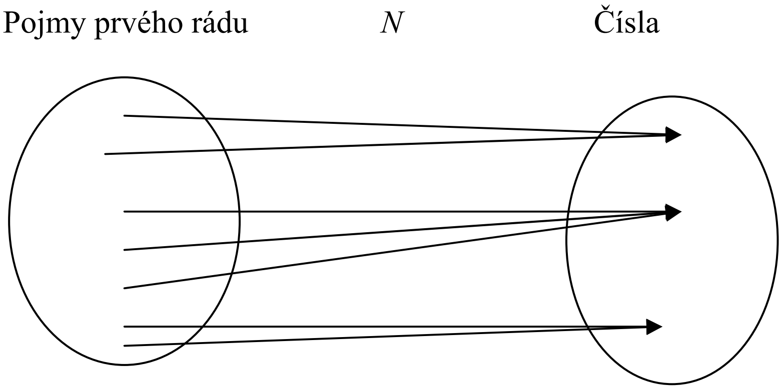
(po objavení antinómie), v liste Russellovi z 28. júla 1902 (list XXXVI/6)[7] na otázku, ako uchopujeme logické entity, odpovedá:

> „Nenašiel som žiadnu inú odpoveď na to; uchopujeme ich ako rozsahy pojmov, alebo všeobecnejšie, ako priebehy hodnôt funkcií...“

Čiže Frege nevedel dať odpoveď na položenú otázku a vlastne v teoretickom systéme mimo sprievodných intuícii rezignoval na toto odlíšenie. Tým mohla byť na jednej strane uspokojená jeho ontologická intuícia, že predmet je nasýtená entita, zatiaľ čo funkcia je nenasýtená entita, a na druhej strane intuícia, že v úlohe toho, o čom hovoríme vo vete – v úlohe podmetu – je vždy predmet: môžeme hovoriť aj o funkcii – funkcia môže byť podmetom vety – ak ju zastúpi jej priebeh hodnôt. Preto Frege fixoval premenu Funkcie na priebeh hodnôt, ktorý sa dal poľahky chápať ako predmet[8]. Ale v § 107 hovorí takmer prorocky, že v definícii Čísla predpokladal význam výrazu „rozsah pojmu“ ako známy, nevylučuje však aj inú cestu k tejto definícii, a preto zdôrazňuje: „Ani ja neprikladám rozhodujúcu váhu zavedeniu rozsahu pojmu“.

Keďže odlišným pojmom s totožnými alebo iba rovnopočetnými rozsahmi bude prislúchať to isté číslo, definícia čísla, technickejšie, kontextuálna definícia operátora kardinality *N*, špecifikuje pojem druhého rádu, ktorý stanovuje mnoho-jednoznačné priradenie (funkciu) z oblasti pojmov prvého rádu do oblasti určitých predmetov, konkrétne Čísel

(N: $\text{Pojmy}_{\text{prvého rádu}} \Rightarrow$ Čísla):



Ak akceptujeme Fregeho chápanie rozsahov pojmov ako predmetov, ekvivalenčná relácia rovnopočetnosti (≈) medzi pojmami je ekvivalentná totožnosti dvoch predmetov ako rozsahov druhorádových pojmov „byť rovnopočetný s *F*“ a „byť rovnopočetný s *G*“:

(Def. 2) $(\forall F)(\forall G)\,[N(F) = N(G) \leftrightarrow_{\text{df}} (\lambda G{:}\, F \approx G) = (\lambda F{:}\, G \approx F)]$,

kde výraz tvaru (λG: A), pričom λ je operátor abstrakcie, *G* je funkcionálna premenná a *A* je formula, môžeme čítať ako pojem (trieda) tých *G* , ktoré spĺňajú podmienku *A*. Voľnejšie povedané, lambda operátor nám umožňuje generovať z Funkcií ich priebehy hodnôt.
Frege potom prejde k definíciám jednotlivých čísel. Číslo **Nula** definuje asi takto [§ 74]:

(Def. 0) 0 je Číslo, ktoré prislúcha pojmu „netotožný so sebou samým“,

alebo konkretizácia podľa (FDC):

---

[7] [BW]
[8] Zámena predmetu *simpliciter* s predmetom predikácie bola súčasťou Fregeho „osudovej” chyby. Cf. [Materna 2000]

(Def. 0*) Nula prislúcha pojmu F vtt F je rovnopočetný s pojmom „netotožný so sebou samým,“

symbolicky:

(Def.** 0) $N(F) = 0 \leftrightarrow_{\text{df}} F \approx (\lambda x\colon x \neq x)$.

To znamená, že všetkým pojmom, pod ktoré nič nespadá, prislúcha to isté číslo Nula.
Potom definuje pojem **bezprostredného nasledovníka** S (*successor*) [§ 76]:

(Def. S): n bezprostredne nasleduje za m (nSm) vtedy a len vtedy, keď existuje pojem F a pod neho spadujúci predmet x taký, že n je Číslo prislúchajúce pojmu F a m je Číslo prislúchajúce pojmu „spadajúci pod F, ale nie totožný s x“.

Symbolicky:

(Def.* S) $nSm \leftrightarrow_{\text{df}} (\exists F)(\exists x)[F(x) \wedge N(F) = n \wedge N(\lambda y\colon F(y) \wedge x \neq y) = m]$.

Ďalej definuje číslo **Jeden** ako bezprostredného nasledovníka Čísla 0 [§ 77]. Číslo, ktoré prislúcha pojmu „totožný s 0 a netotožný s 0,“ je totožné s Číslom „netotožný so sebou samým“, pretože pod neho nič nespadá, t.j. je 0. Potom podľa (Def. S) Číslo, ktoré prislúcha pojmu „totožný s 0“, nasleduje v rade prirodzených čísel bezprostredne za Číslom 0 a môžeme ho označiť „1“: $1 = S(0)$ (0 v tomto prípade spĺňa podmienku pre m z (Def S), kde F je „byť totožný s 0“, t.j. $N(\lambda y$: „byť totožný s 0“$(y) \wedge 0 \neq y) = m$; 1 spĺňa podmienku pre n).

(Def. 1) 1 je Číslo, ktoré prislúcha pojmu „totožný s 0“.

alebo konkretizácia podľa (FDC):

(Def. 1*) Jeden prislúcha pojmu F vtt F je rovnopočetný s pojmom „totožný s Nulou,“

symbolicky:

(Def 1) $\mathrm{N}(F) = 1 \leftrightarrow_{\text{df}} F \approx (\lambda x\colon x = 0)$.

Frege ďalej načrtáva dôkazy (ktoré už urobil v *Begriffsschrift*, prípadne urobí v *Grundgesetze*) niektoľkých viet – okrem iného, že 1 je jediným bezprostredným nasledovníkom 0, že každé Číslo okrem 0 bezprostredne nasleduje za nejakým Číslom a pod.

4. 6. Matematická indukcia je nástroj logiky

Nutnou podmienkou realizovateľnosti projektu logicizmu bolo, že známy prostriedok matematických dôkazov – matematická indukcia – bude logicky odvodená. V § 82 načrtáva dôkaz, že Číslo, ktoré prislúcha pojmu „prináležiaci radu prirodzených čísel, ktorý končí Číslom n“, je bezprostredným nasledovníkom Čísla n. Najprv ho definoval na základe pojmu „nasledovanie predmetu y za predmetom x vo všeobecnom φ-rade“, a ten potom zredukoval na čisto logické vzťahy. Tým sa mu podarilo ukázať, že *matematická indukcia* je všeobecný nástroj logiky[9]:

> „... spôsob usudzovania z n na $(n+1)$, ktorý sa bežne považuje za špecificky matematický spôsob usudzovania, sa zakladá na všeobecných logických spôsoboch usudzovania“ [§ 108].

[9] Tomu zodpovedá v [BS §§ 24 – 26] pojem *dedičnej vlastnosti vo φ-rade*.

Podrobnú rekonštrukciu tohto dôkazu môžeme nájsť napríklad u Richarda Hecka [1993, 591ff]. Matematická indukcia je vlastne dôsledok toho, že číslo je prirodzeným číslom vtedy a len vtedy, keď prináleží radu čísel začínajúcim číslom 0.

4. 7. Konečné a nekonečné Čísla

Vzápätí Frege definuje konečné číslo. Ak nejaké Číslo prináleží radu prirodzených čísel, ktorý sa začína Číslom 0, tak je to **konečné Číslo**. Ďalej načrtáva dôkaz, že žiadne konečné číslo v rade prirodzených čísel nenasleduje za sebou. Tým sa dostáva k nekonečnému Číslu. **Nekonečné Číslo** (∞_1) definuje ako Číslo, ktoré prislúcha pojmu „konečné Číslo“:

(Def. ∞_1) ∞_1 prislúcha pojmu F vtt F je rovnopočetný s pojmom „konečné Číslo.“

Čiže všetkým pojmom, ktoré sú rovnopočetné s pojmom „konečné Číslo“, prislúcha číslo ∞_1, t. j. predmety, ktoré pod takéto pojmy spadajú, sú vzájomne jednoznačne priraditeľné ku konečným číslam (môžeme ich konečnými číslami jednoznačne očíslovať, a teda dobre usporiadať). Ak by Číslo, ktoré prislúcha pojmu „konečné Číslo,“ bolo konečné, tak by malo nasledovať za sebou samým (lebo by malo nasledovať za radom všetkých konečných čísel, a teda aj za sebou samým), ale ako konečné nemôže nasledovať za sebou samým. Tento spor nevzniká, ak nekonečnému číslu prisúdime vlastnosť, že môže nasledovať za sebou samým, t. j. že nie je konečné.

4. 8. Ako môžeme predmetom z časopriestoru prisudzovať nejaké čísla, keď čísla sú vlastnosťami pojmov?

Niekto by mohol namietať proti fregeovskému vysvetleniu čísel napríklad takto: ako to, že môžeme počítať a kvantitatívne porovnávať veci z časopriestoru, keď čísla sú vlastnosti pojmov? „Bežná“ sémantická analýza vety

(1) Jano má dve ruky

by nás viedla k takémuto výsledku: veta (1) je o Janovi a jemu prisudzuje vlastnosť „mať dve ruky“ (aby bolo zrejmé, že nejde o nejaké vlastníctvo, predikát môže byť formulovaný ako „byť dvojruký“). Takáto analýza nepotrebuje fregeovské vysvetlenie povahy čísla, a preto by sme celý logicizmus mohli považovať za zbytočný. Zdá sa však, že nás klame jazyková štruktúra vety. Predikát „byť dvojruký“ je iba zdanlivo jednoduchý a nemôžeme mu správne rozumieť, pokiaľ nepochopíme, že je z logického hľadiska zložený a iba zdanlivo je toho istého logického typu ako kvalitatívne empirické vlastnosti („biely“, „čiernovlasý“[10] a pod.). Číslo 2, ktoré pri vyššie uvedenej analýze sa „skrylo“ v pojme »dvojruký«, sa ukáže ako autonómna zložka významu, ak vetu (1) preformulujeme:

(1*) Janove ruky sú dve,

kde už je zrejmé, že číslo dva je prisudzované skôr Janovým rukám, nie priamo Janovi. To by sa mohlo zdať stále dosť vzdialené od Fregeho vysvetlenia, ktoré by malo znieť asi takto: číslo dva je vlastnosťou pojmu »Janove ruky«. To, že základom pojmu čísla je naozaj ekvivalenčný vzťah rovnopočetnosti medzi pojmami, nie objektami z časopriestoru, demonštruje význam nasledujúcej vety:

(2) Jano má toľko rúk, koľko očí,

[10] Ak by sme takéto vlastnosti nepovažovali za základné, mohli by sme ich tiež explikovať ako zložené a odvodené na základe porovnávania. Tu rozhoduje výber tzv. intenzionálnej bázy [Tichý 1988, 201ff].

ktorej logickú štruktúru návodnejšie ukazuje veta:

(2*) Janove ruky sú rovnopočetné s Janovými očami,

alebo – keď úplne akceptujeme Fregeho zdrvujúcu kritiku empirického vysvetlenia povahy čísla – ešte návodnejšia formulácia:

(2**) Pojem »Janove ruky« je rovnopočetný s pojmom »Janove oči«.

Je empiricky náhodným faktom, že oba pojmy – »Janove ruky«, »Janove oči« spadajú pod ten istý pojem (číslo) Dva. Značný rozdiel medzi jazykovou štruktúrou viet (2) a (2**) môže byť vysvetlený jednak uprednostnením pohodlnosti a efektívnosti bežnej komunikácie – príklonom k idiomatickým tvarom, a jednak nedostatočným rozlišovaním prvorádových a druhorádových vlastností. To môže byť ospravedlnené aj prijatím východiska, že čísla sú základné objekty bázy *sui generis.* Takýto prístup je pohodlný pre aplikáciu logiky na analýzu prirodzeného jazyka a podporený princípom transparentnosti jazykových štruktúr tohto jazyka. Žiaľ, znemožňuje to vysvetlenie povahy Čísla, hlbšie porozumenie toho, čo Číslo naozaj je. Dôsledný zástanca logicizmu by preto obetoval princíp transparentnosti pre prípad viet prirodzeného jazyka s číselnými údajmi a navrhoval by ich systematickú rekonštrukciu tak, aby bolo zrejmé, že Číslo ako (minimálne) druhorádový pojem je vlastnosťou (minimálne) prvorádových pojmov. Vo svetle takéhoto prístupu by bežná veta

(3) Jano je vysoký 1,80 m

bola parafrázovaná na logicky ekvivalentnú vetu

(3*) Medzi číslom, ktoré prislúcha pojmu »Janova výšky« a číslom, ktoré prislúcha pojmu »jednotka dĺžky« je vzťah (pomer), ktorému prislúcha číslo 1,80.

a veta

(4) Jano je vyšší ako Mišo

by bola rekonštruovaná asi takto:

(4*) Medzi číslom, ktoré prislúcha pojmu »Janova výšky« a číslom, ktoré prislúcha pojmu »Mišova výška« je vzťah (pomer), ktorý spadá pod reláciu »byť väčší ako«.

Takéto rekonštrukcie z dielne logicizmu sa zdajú neobyčajne krkolomné a zložité. Zhruba takto však postupoval – a to pôvodne nezávisle – aj Bertrand Russell. Máme dve alternatívy: buď uprednostníme pohodlnosť jazykových štruktúr a stratíme priezračnosť zachytenia číselných údajov, ktoré by zodpovedali povahe Čísla, alebo budeme používať ťažkopádne formulácie a zachránime princíp transparentnosti pre číselné údaje. Prvá cesta je vhodná všade tam, kde pojem čísla nie je predmetom skúmania, ale číselné výrazy sú používané s dostatočným vhľadom. Druhá cesta je cestou skúmania povahy čísla, cestou zvedavého filozofa, logika či matematika, ktorý chce vedieť, čo je to číslo.

5. Oprava logicizmu

Po tom, ako Russell objavil vo Fregeho technickom dopracovaní logicizmu – v Grundgesetze der Arithmetik I antinómiu**,** ktorá sa neskôr stalá známou ako *Russellova* *antinómia* a netýkala sa iba Fregeho systému, ale rovnako aj Cantorovej teórie množín a Dedekindovej teórie, zdvihol zástavu logicizmu Russell. Hľadal všeobecný spôsob liečby Fregeho cesty a chybu identifikoval ako chybu kruhovosti (*vicious circle*).

(VC) ". . . žiadny celok nemôže obsahovať prvky definované pomocou jeho samého”[11]

alebo

(VC*) “... objekt nemôže byť kruhový v tom zmysle, že by včleňoval alebo obsahoval triedu, ktorej je prvkom” [1925, 54].

Russell spolu s Whiteheadom realizovali projekt logicizmu v podobe tzv. *rozvetvenej teórie typov* (RTT). O dvoch axiómach tohto systému sa však pochybovalo, či patria do logiky: o axióme nekonečna a o axióme reducibility. Pod tlakom najmä Quineovej kritiky Russell rezignoval na obhajobu týchto axióm ako analytických právd. Zdalo sa, že logicizmus zomrel.

6. Rehabilitácia Fregeho matematického výkonu

Fregeho matematické výkony sa spolu s *Grundgesetze* dlho ignorovali a ak sa úplne neodmietali, tak aj pri najväčšej ústretovosti sa považovali skôr za pochabú alternatívu. Hodnotenie jeho matematických výkonov sa však v neskoršom období výrazne zmenilo.

Jedno z prvých ocenení Fregeho za jeho matematický výkon pochádza od Charlesa Parsonsa, ktorý asi prvý konštatoval možnosť odvodenia aritmetiky z Fregeho definície kardinality (FDC) (nazývanej tiež *Humov princíp* alebo *HP*) [1965]. Crispin Wright [1983, 154ff] ukázal, že tzv. *Peanov druhý postulát* (Každé prirodzené číslo má nasledovníka) a Peanove axiómy aritmetiky sú odvoditeľné v rámci druhorádovej predikátovej logiky Fregeho *Begriffsschrift* z Fregeho definície kardinality (treba zdôrazniť, že bez akejkoľvek odvolávky na teóriu množín). John Burgess [1984, 638 – 640] neskôr dokázal Wrightov predpoklad konzistentnosti Humovho princípu. George Boolos [1998a; 1998b] tento dôkaz prepracoval a navyše dokázal, že v rámci predikátovej logiky druhého rádu z platnosti Humovho princípu vyplýva nekonečnosť prirodzených Čísel (tzv. *Fregeho teoréma*):

> „... znovuobjavenie Fregeho teorémy – teorémy, že z teórie druhého rádu obsahujúcej Humov princíp vyplýva nekonečnosť prirodzených čísel – má najväčší význam pre naše ocenenia Fregeho matematického výkonu“ [Demopoulos 1995, 3].

Pozoruhodné ocenenie sa dostalo aj Fregeho *Základom aritmetiky* po viac ako sto rokoch: v roku 1987 Boolos [1998a], vychádzajúc z Fregeho *Základov*, vypracoval konzistentnú aritmetiku (FA) v duchu pôvodneho Fregeho projektu: „... definície a teorémy z §§ 68 – 83 *Základov* možno tvrdiť a dokázať vo FA [tzv. *fregeovská aritmetika*] *spôsobom určeným Fregem“* [1998a, 191].

Richard Heck ukázal, že Frege v *Grundgesetze* dokázal dve teorémy, za dôkaz ktorých bol oslavovaný Richard Dedekind: teorému rekurzie na prirodzených číslach a teorému, že všetky „jednoducho nekonečné systémy“, t.j. štruktúry, ktoré spĺňajú Dedekindove-Peanove axiómy, sú izomorfné:

> „*Grundgesetze* obsahujú nielen odvodenie axióm aritmetiky v logike druhého rádu z Humovho princípu, ale obsahujú aj dôkaz vo fregeovskej aritmetike, že *Fregeho vlastné* axiómy aritmetiky určujú triedu štruktúr izomorfných s prirodzenými číslami. Navyše obsahujú dôkaz čisto v logike druhého rádu oveľa dôležitejšieho faktu, že všetky štruktúry spĺňajúce tieto axiómy sú izomorfné.“[1995, 327].

[11] [Russell 1908, IV].

Treba ešte upozorniť, že jednak prvorádový fragment Fregeho logického systému s „upraveným" chápaním Základného zákona V je explikovateľný ako konzistentný [Parsons 1995], jednak existuje rozšírenie Fregeho prvorádovej teórie, ktoré je konzistentné [Bell 1995]. Tieto rekonštrukcie plne rehabilitujú Fregeho matematické výkony, ale neposkytujú všeobecnú terapiu liečby logicizmu: skôr iba „vykrajujú" nepochybne veľmi cenné zdravé časti celkového projektu. Fregemu v prvom pláne však nešlo o časť projektu logicizmu, ale o celý projekt.

Ako sme videli, Boolos dokázal, že axióma nekonečna je vo Fregeho systéme odvoditeľná z Fregeho definície kardinality (*Humovho princípu*). Ak teda akceptujeme s Fregem, že táto definícia je logická, je logickou aj táto axióma a projekt logicizmu bol úspešný. Avšak Boolos [1998c, 307] i Heck na rozdiel od samého Fregeho, Wrighta či Bealera považujú Humov princíp za analytický iba v jednom smere (sprava doľava: ak dva pojmy sú rovnopočetné, tak im prislúcha to isté číslo), ktorý neviedol k Russellovmu paradoxu. V druhom smere (zľava doprava) považuje Boolos tento princíp za syntetický – špecifický pre matematiku, a teda svoju rekonštrukciu fregeovskej aritmetiky nepovažuje za podporu logicizmu. Argumenty, ktoré na obranu tohto stanoviska uvádza, možno však vyvrátiť z pozícií nasledujúcich oživení logicizmu, ale podrobná demonštrácia by presiahla rámec tohto článku. Koniec koncov sám Boolos priznal, že jeho argumenty proti logicizmu nie sú vôbec likvidačné.

7. Oživenie logicizmu

7. 1. Wrightova rekonceptualizácia v PL2

Napriek tomu, že objavenie logického sporu v *Grundgesetze* niektorí považovali za znak toho, že už je nemožné, aby niekto nasledoval Fregeho na jeho ceste,[12] našli sa takí.

Crispin Wright [1983, 154 – 168] predstavil *rekonceptualizáciu* Fregeho projektu: formuloval systém $N^{=}$ konzistentnej axiomatizácie aritmetiky v predikátovej logike druhého rádu, vychádzajúc z verzie Humovho princípu (*Fregeho definície čísla*) a univerza U={0,1,2,..., $\aleph_0$}. Humov princíp považuje Wright za analytický, a preto takéto odvodenie aritmetiky čisto logickými prostriedkami považuje za naplnenie idey logicizmu.

7. 2. Bealerova rekonštrukcia v PL1 + intenzionálna abstrakcia

Neobyčajne prepracovanú rehabilitáciu programu logicizmu demonštroval George Bealer [1982, 120 – 147] v rámci svojho systému intenzionálnej logiky. Vo svojom *neofregeovskom* projekte uskutočnil logicky konzistentnú rekonštrukciu Peanovej aritmetiky čisto logickými prostriedkami. Zachováva pôvodnú Fregeho intuíciu, že Číslo je vlastnosť pojmov (*intenzionálna entita*) bez jej dodatočnej redukcie na rozsah vlastnosti (*extenzionálna entita*) [Ibid. 123]. Pretože pri odvodení Peanovej aritmetiky nepotrebuje nič iné okrem predikátovej logiky prvého rádu s intenzionálnou abstrakciou, považuje túto neofregeovskú explikáciu za jednoduchú a oveľa prirodzenejšiu ako ktorékoľvek iné. Vyvracia všetky vážnejšie námietky proti logicizmu vrátane filozofických.

Vyvracia napríklad častú námietku proti logicizmu, že logicistická rekonštrukcia klasickej matematiky využíva teóriu množín, ktorá nie je – aj podľa Bealera – súčasťou logiky.[13] Jeho rekonštrukcia nevyužíva vôbec teóriu množín [1982, 129]. Rovnako nepotrebuje špeciálnu axiómu nekonečna, pretože ju vo svojom systéme odvodí čisto logicky – ale už nepôjde o nekonečne veľa predmetov, ale nekonečne veľa vlastností. Podobne nepotrebuje univerzálnu množinu, voči existencii ktorej je vyslovená oprávnená nedôvera, ale pracuje s univerzálnou vlastnosťou [1982, 134].

---

[12] Cf. [Dummett 1977].

[13] Niektorí logici zastávali a možno aj zastávajú názor, že teória množín je súčasťou logiky.

Úplne presvedčivo sa vyrovnáva s údajnou kritikou logicizmu založenou na Gödelových teorémach: keďže neexistuje úplná rekurzívne axiomatizovateľná teória čísel, nie všetky pravdy matematiky môžu byť logicky odvoditeľné, a teda logicizmus je vraj chybný. Chyba tejto kritiky spočíva v predpoklade, že pojem „platnosti“ (v teórii) je rekurzívne axiomatizovateľný. *Po prvé*, Gödel by bez rozvoja modernej logiky, na ktorom majú zásluhu najmä Frege a Russell, nemohol ani len formulovať otázky, na ktoré hľadal odpovede; pritom dokázal svoje teorémy vďaka realizácii logicizmu v istej podobe - v rámci rozvetvenej teórie typov, kde sú čísla odvodené z logických pojmov. *Po druhé*, Gödelove teorémy hovoria, že práve pojem „platnosti“ nie je rekurzívne axiomatizovateľný. Takže logicizmus považuje matematické pravdy za platné, a nie rekurzívne axiomatizovateľné – nestotožňuje platnosť s odvoditeľnosťou. Gödelove teorémy hovoria – ako sme už uviedli – skôr o neuskutočniteľnosti Hilbertovho formalistického programu.

8. Záver

Ukazuje sa, že projekt logicizmu sa po období takmer úplného zatratenia ukázal v novom svetle ako neobyčajne presvedčivý a vstal akoby z mŕtvych: **idea logicizmu** bola plne rehabilitovaná zhruba sto rokov po uverejnení Fregeho *Základov aritmetiky*.

Katedra logiky a metodológie vied
Filozofická fakulta UK
Šafárikovo nám. 6, 818 01 Bratislava
e-mail: Frantisek.Gaher@fphil.uniba.sk

Literatúra:

BEALER, G. (1982): **Quality and Concept.** Oxford University Press, New York.
BELL, J. (1995): Fregean Extension of First-order Theories (1994 **Mathemaical Quarterly**, 40, 27 – 30). In: [Demopoulos 1995], 432 – 440.
BOOLOS, G. (1998): **Logic, Logic, and Logic.** Cambridge, Mass.; Harward Univesity Press.
BOOLOS, G. (1998a): The Consistency of Frege´s *Foundations of Arithmetic* (1987). In: [Boolos 1998]
BOOLOS, G. (1998b): The Standard of Equality of Numbers (1990). In: [Boolos 1998]
BOOLOS, G. (1998c): Is Hume´s Principle Analytic? In: [Boolos 1998], 301 – 314.
BURGESS, J. (1984): The Philosophical Review, 93, 638 - 640.
CMOREJ, P. (2000): K Fregeho teórii pojmov. In: [Gahér 2000].
DEMOPOULOS, W. (1995): **Frege´s Philosophy of Mathematics.** Cambridge, Mass.; Harward U. P.
DUMMETT, M. (1977): **Elements of Intuitionism.** Oxford.
EVES, H. – NEWSON, C. V. (1965): **An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics.** New York – London.
FREGE, G. (1879): **Begriffsschrift**, eine der aritmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. L. Nebert, Halle a. S., X, 88 s.; znovu vydané hg. I. Angelelli, Darmstadt 1964.
FREGE, G. (1884): **Die Grundlagen der Arithmetik**. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. W. Köbner, Breslau, XI, 119 s.; znovu vydané Darmstadt 1961;
FREGE, G. (1893): **Grundgesetze der Arithmetik.** Begriffsschriftlich abgeleitet. **I**. Band. H. Pohle, Jena.
FREGE, G. (1903): **Grundgesetze der Arithmetik.** Begriffsschriftlich abgeleitet. **II.** Band. H. Pohle, Jena.
GAHÉR, F. (ed.) (2000): Bolzano ✞150 - ∗Frege 150. Pramene analytickej filozofie. **Logica et methodologica**, VI. UK Bratislava.
GAHÉR, F. (2001): Fregeho filozofia matematiky a program logicizmu. In: Frege, G. (2001): **Základy aritmetiky**, nakl. SAV SR - Veda, Bratislava, XI – XLIII.
HECK, R. G. jr. (1993): The Development of Arithmetic in Frege´s *Grundgesetze der Arithmetik*. In: **The Journal of Symbolic Logic,** Vol 58, No. 2, 579 – 601.
HECK, R. G. jr. (1995): Definition by Induction in Frege´s *Grundgesetze der Aritmetik.* In: [Demopoulos 1995], 295 – 333.
van HEIJENOORT, J. (1967): **From Frege to Gödel.** Cambridge, Mass.; Harward Univesity Press.
MATERNA, P. – ŠTĚPÁN, J. (2000): **Filozofická logika: Nová cesta?** Olomouc.
PARSONS, T. (1965): Frege´s theory of number. In: Black, M (ed.): **Philosophy in America.** Cornell U. P. Ithaca. 180 – 203.
PARSONS, T. (1995): The Consistency of the First-order portion of Frege´s logical systems (**Notre Dame Journal of Formal Logic.** 28, 1987, 161 – 188). In: [Demopoulos 1995], 422 – 431.

QUINE, W. V. O. (1963): **Set Theory and its Logic.** Harvard U.P., Cambridge, Mass.

QUINE, W. V. O. (1967): Introduction to Russell [1908] In: [van Heijenoort, 1967].

SIMONS, P. (1995): Frege´s Theory of Real Numbers (**History and philosophy of logic***,* 8, 1987, 25 – 44). In: [Demopoulos 1995] 358-386.

TICHÝ, P. (1988): **The Foundations of Frege´s Logic.** W. de Gruyter, Berlin – New York.

WHITEHEAD, A. N. – RUSSELL, B. (1925): **Principia Mathematica.** Vol. I, Cambridge U. P.

WRIGHT, C. (1983): **Frege´s Conception of Number as Objects.** Aberdeen U. P.