Mali stoici predikátovú logiku?

(Mohli stoici overovať súdobé dôkazy z aritmetiky?)

František GAHÉR

0. Úvod

V histórii vedy môžeme nájsť nemálo záhad. Mnohé z nich sa časom vysvetlia, ale rovnako časom sa zas objavia iné – „nové" záhady. Aby sa z nejakého problému stala naozaj záhada, musí spĺňať isté kritéria. O nejakom probléme povieme, že je záhadou, ak nevieme nájsť jeho vysvetlenie, hoci by sme na základe širších súvislostí a poznatkov očakávali, že má riešenie a že toto riešenie (vysvetlenie) je nám dostupné. Napríklad môžeme očakávať, že dôkazy, ktoré spontánne používa nejaká vedná disciplína – napr. aritmetika či geometria, sa stanú predmetom reflexie profesionálnych logikov a aj keď ich neobjavili, tak ich aspoň zahrnú do svojej výbavy a ak ich výbava nedokáže „absorbovať" tieto spôsoby dokazovania, tak sa budú usilovať o vytvorenie nového systému logiky, ktorý by obsahoval aj nové metódy dokazovania. Spätne takéto vylepšené inštrumentárium môže pomocť užívateľom logiky – napríklad novým generáciam aritmetikov a geometrov – aplikovať tieto metódy dokazovania úplne cieľavedome ako štandardnú súčasť logických metód. Čiže predpokladáme, že spontánne používané logické postupy sa časom premietnu do štandardizovanej logiky. Je ťažke nejako presnejšie stanoviť, koľko času je treba na toeretickú reflexiu spontánne používaných metód. Závisí to od mnohých, často neidentifikovaných okolností. Ak napríklad grécki aritmetici niekoľko generácií poznali a hojne používali isté typy dôkazov, mohli by sme očakávať, že si ich všimnú aj ich kolegovia - profesionálni logici a aj keby títo logici neboli takí geniálni ako tí aritmetici, predsa po uplynutí niekoľkých storočí by ich mali dokázať zakomponovať do nejakého systému logiky, resp. taký systém logiky vytvoriť. Ak ide o dejiny starovekej logiky, tak sa zdá, že to tak nebolo. Jednoducho vtedajší logici podľa všeobecne rozšíreného názoru nedisponovali takým systémom logiky, v ktorom by mohli overovať mnohé dôkazy z vtedajšej aritmetiky či geometrie.

Je to o to väčšou záhadou, lebo sa vie, že napríklad Aristoteles[1] cieľavedome skúmal prípravné práce geometrov, ktoré viedli k vybudovaniu axiomatického systému geometrie, ktoré zavŕšil v práci *Stoicheia* Euklides. Aristotelovi sa absorbcia vtedajšieho spôsobu dokazovania z aritmetiky a geometrie zrejme nepodarila, pretože ním koncipovaný systém logiky – kategorický sylogizmus – môžeme považovať nanajvýš za fragment predikátovej logiky pre singulárne predikáty (bez indivíduových konštánt a premenných). Naproti tomu aritmetika i geometria štandardne pracovala s reláciami, najmä s binárnymi predikátmi typu *byť väčší, byť menší, rovnať sa*, a samozrejme aj s konštantami a premennými pre čísla, úsečky a pod., ktorým by v príslušnom systéme logiky odpovedali indivíduové konštanty a premenné.

Druhým adeptom na absorbciu spontánne používanej logiky je stoická logika. Łukasiewicz[2] presvedčivo ukázal, že stoici mali pravidlový systéme výrokovej logiky. Mates sa zaoberal aj otázkou, či mali stoici aspoň nejaký fragment predikátovej logiky. Keďže zistil, že žiadna veta v stoických príkladoch úsudkov nezačína slovíčkom „všetci" alebo „každý", [3] prikláňal sa k prijatiu všeobecne rozšírenej hypotéza, že stoici nemali predikátovú logiku, a ak mali, tak sa z nej nezachoval žiadny fragment. Pokúsime sa ukázať jednak to, že táto hypotéza je v rozpore s textovou evidenciou, a jednak to, že stoický systém logiky nebol iba systémom výrokovej logiky, ale takým, ktorý naozaj absorboval metódy súdobých dôkazov z aritmetiky

[1] Cf. [Mládenek 1999, 11-12];[McKirahan 1992, 137].

[2] [Łukasiewicz 1927; 1924].

[3] [Mates 1953, 32].

a geometrie. Takto by stoici mohli overovať dôkazy v aritmetike. Ak bude naše vysvetlenie prijateľné, jedna záhada by prestala byť záhadou.

1. Základné schémy (pravidlá) usudzovania stoickej logiky

Za základné či *nedokázateľné* pravidlá považovali stoici nasledujúce schémy usudzovania.

1. Ak prvé, tak druhé.
   Avšak prvé.
   Teda druhé.

2. Ak prvé, tak druhé.
   Avšak nie druhé.
   Teda nie prvé.

3. Nie je pravda, že aj prvé aj druhé.
   Avšak prvé.
   Teda nie druhé.

4. Buď prvé alebo druhé.
   Avšak prvé.
   Teda nie druhé.

5. Buď prvé alebo druhé.
   Avšak nie prvé.
   Teda druhé.[4]

Slová *prvé, druhé* zastupujú *axiómata* – významy jednoduchých alebo zložených výrokov. Keďže spojky *ak-tak; a (aj-aj); nie je pravda, že; buď-alebo* sú extenzionálne, nie sú "citlivé" na významy výrokov, ale na pravdivostné hodnoty, ktoré tieto významy určujú, môžeme ich považovať pri istom zjednodušení za výrokové premenné, resp. za premenné zastupujúce zložené výroky.

2. Stoická teória dedukcie

2.1. *Themata* či *theórémata* - metapravidlá stoickej logiky

Ak mali stoici o nejakom úsudku či úsudkovej schéme (pravidle) dokázať, že je konkluzívna, tak to riešili podľa toho, či išlo o *jednoduchú* alebo *nie-jednoduchú* úsudkovú schému. Jednoduché úsudky a úsudkové schémy mali logickú štruktúru zjavne zhodnú s jedným zo základných nedokázateľných schém, a preto nevyžadovali dôkaz. Ostatné - *nie-jednoduché* úsudky a úsudkové schémy vyžadovali dôkaz, ktorý spočíval v ich redukcii na tieto nedokázateľné (základné) pravidlách. Túto procedúru redukcie úsudkov či úsudkových schém na postupnosť úsudkov, uskutočnených podľa základných –nedokázateľných pravidiel umožňovali štyri metapravidlá. Procedúru redukcie nazývali ***analysis***[5] (ἀνάλυσις) a metapravidlá nazývali - ***themata***[6] či *theóremata*[7] . V literatúre sú známe rozličné návrhy rekonštrukcie týchto metapravidiel, a keďže tieto rozdiely neovplyňujú expozíciu našej problematiky, uvedieme iba jednu ich rekonštrukciu bez anylýzy príslušných textov a konkurenčných návrhov.[8]

***Thema 1*.- dôkaz z nemožného** (*per impossibile*):

(Th1) $$\frac{A_1, A_2, \text{non } C \vdash \text{non } B}{A_1, A_2, B \vdash C}$$

[4] [Sextos 1970; 1983, II. 224-228]; [Sextos 1984; 1993; 1994, II. 157–159].
[5] [Sextos 1970; 1983, II. 230]
[6] [Diogenes VII, 78].
[7] [Sextos 1970; 1983, II. 231].
[8] Prehľad odlišných návrhov i podrobné zdôvodnenie predkladanej rekonštrukcie čitateľ môže nájsť v [Gahér 2000, 219 - 239].

Kde písmená A_1, A_2, B, C (ďalej aj K) znamenajú jednoduché alebo zložené výroky (presnejšie *ich významy*, t.j. *axiómata*). Nejaký výrok C logicky vyplýva z troch premís, ak z dvoch premís a negovaného (spochybneného) záveru C vyplýva negácia tretej premisy.

Thema 2. **- eliminácia premisy**

(Th2) $$\frac{\Delta \vdash C, \qquad C, \Theta \vdash K}{\Delta, \Theta \vdash K,}$$

kde veľké grécke písmená znamenajú nie nutne disjunktné množiny výrokov. Táto druhá *thema* nám teda umožňuje elimináciu určitej premisy a prípadne i vymazanie jednej z opakujúcich sa premís.

Thema 3. **- eliminácia dvoch premís**

(Th3) $$\frac{A, B \vdash K \qquad \Delta \vdash A \qquad \Theta \vdash B}{\Delta, \Theta \vdash K,}$$

kde veľké grécke písmená zastupujú disjunktné množiny výrokov. Toto pravidlo umožňuje elimináciu dvoch premís.

Thema 4. **- zavedenie implikácie**

(Th4) Ak platí $A_1, A_2, ..., A_n \vdash B$, tak platí $A_1, A_2, ..., A_{n-1} \vdash (A_n \to B)$.

Podľa nej ak z nejakých premís vyplýva záver, tak z týchto premís bez niektorej z nich vyplýva implikácia, ktorej antecedent je tvorený onou vzatou premisou a konzekventom je pôvodný záver. Išlo by vlastne o základný tvar tzv. *teorémy dedukcie*.

2.2. Dôkazy v stoickej logike

Dôkaz pravidla, ktoré veľmi často používali skeptici, ale i stoici – tzv. *pravidlo reductio ad absurdum* $A \to B,\ A \to \neg B \vdash \neg A$ by v stoickom systéme logiky vyzeral asi takto:

1. $A \to B, A \vdash B$	podľa prvého základného pravidla (MP)
2. $A, \neg B \vdash \neg(A \to B)$	podľa prvej *thema* (Th1) z 1.riadku “spochybnením” impl. $A \to B$
3. $A \to \neg B, A \vdash \neg B$	podľa prvého základného pravidla (MP)
4. $A \to \neg B, A, A \vdash \neg(A \to B)$	podľa log. teorémy (Th2) z 3. a 2. riadku “eliminácia” $\neg$ B
5. $A \to \neg B, A, \vdash \neg(A \to B)$	podľa log. teorémy (T2) “vymazanie” A zo 4. riadku
6. $A \to B, A \to \neg B \vdash \neg A$	podľa prvej *thema* (T1) z 5. riadku “spochybnením” premisy A.

3. Nemetodické úsudky a všeobecná premisa

Názor o redukovateľnosti všetkých „užitočných“ druhov úsudkov na sylogistické vychádzal z Aristotelovho presvedčenia, že všetky druhy úsudkov (dialektické, demonštratívne, rétorické, ... akejkoľvek formy) sa dajú redukovať na sylogizmus alebo na indukciu[9]. „Veľký komentátor“ Aristotela Alexander z Afrodisiady v tejto súvislosti uvádza úsudky či úsudkové schémy, ktoré na to, aby boli konkluzívne, potrebovali byť doplnené o všeobecnú premisu:

„Úsudky, o ktorých stoici hovoria, že uzatvárajú nemetodicky (*amethodós perainontes*), sú tohto druhu. Ak by niekto povedal:
Prvý je väčší než druhý.
Druhý je väčší než tretí.
Teda: prvý je väčší než tretí.
tak tento nevyhnutne vyplýva, hoci nie sylogisticky, a to len vtedy, keď niekto predpokladá dodatočnú premisu, „Čo je väčšie než niečo Väčšie, je tiež väčšie než to, čo je menšie než Väčšie.“[10]

---

[9] Arist. Anal. Pr. II, xxiii, 10-15 (68b).
[10] Cf. [Mates 1953, 127]; [Alexander 1991, p. 73], [Hülser 1987, 1087].

Tento úsudok nie je „zahrnuteľný“ pod kategorický sylogizmus, ale ani pod výrokovú logiku. Jeho dodatočná premisa je všeobecná – je to formulácia tranzitívnosti relácie byť väčší. Radové číslovky *prvý, druhý, tretí* však nezastupujú ani výroky, ani konkrétne čísla či úsečky, a mali by sme im vzhľadom na dodatočnú premisu rozumieť tak, že plnia úlohu premenných pre čísla alebo úsečky, a preto prvé dve premisy sú vlastne tiež všeobecné. Ak stoici vedeli v svojom systéme formulovať všeobecné tvrdenie, mohli mať nejaký fragment predikátovej logiky. Ako vlastne stoici formulovali všeobecné tvrdenie?

4. Predikátová logika u stoikov?

4. 1. Pionieri hypotézy

S prvým vážnejším spochybnením uzavretosti výkladu stoickej logiky iba ako výrokovej logiky prišiel v roku 1969 William Hay. Uviedol hypotézu, že stoici formulovali všeobecné tvrdenie pomocou implikácie a schéma pravidla modus ponens v prípade, že v implikatívnej premise je neurčité zámeno v úlohe podmetu, je pravidlom konkretizácie predikátovej logiky. Túto hypotézu podporil Charles Kahn. To otváralo cestu k vysvetleniu záhady záľahy neoveriteľných úsudkov.

Je ťažké identifikovať všetky dôvody, pre ktoré Hayovu interpretáciu neprijali ostatní. Možno preto, že ani Hay, ani Kahn neurobili ďalšie potrebné kroky v rekonštrukcii stoickej logiky na základe revidovaných pravidiel správneho usudzovania. Urs Egli[11] v roku 1993 oživil tento návrh a dokonca išiel ešte ďalej: v stoickej logike vidí *dynamickú* predikátovú logiku, a to vďaka tomu, že *dynamicky* interpretuje anaforickú viazanosť neurčitého zámena v antecedente implikácie na to, o čom je konzekvent tejto implikácie. Žiaľ, okrem náčrtu rekonštrukcie ani on neuskutočnil rekonštrukciu stoickej logiky na základe nového pohľadu a aj Egliho návrh zostal bez ohlasu.

4. 2. Implikácia v „spolupráci“ s anaforou umožňujú tvoriť všeobecné tvrdenia

V zlomkoch stoikov naozaj nenájdeme príklady výrokov s vymedzovacími kvantitatívnymi zámenami, ktoré podľa aristotelovskej paradigmy reprezentujú všeobecné kvantifikátory. Miesto nich však používajú iné prostriedky. Stoickými príkladmi úsudkov, kde vystupuje všeobecná premisa, sú napríklad tieto:

Ak niečo je človekom, tak je živočíchom.
<u>Toto je človekom.</u>
Teda toto je živočíchom.

Ak niečo je človek, tak je to živočích.
<u>Avšak to nie je živočích.</u>
Preto to nie je človek.

Úsudky tohto typu ako príklady na pravidlá modus ponens a modus tollens môžeme nájsť u neskorého peripatetika.[12] Zdá sa, že sme si neuvedomili jednu „drobnosť“. Ak skladáme tzv. *neurčujúce* axiómata označené vetami typu *Niekto sa prechádza* konjunktívne alebo disjunktívne, nezmenia svoju „existenčnú“ povahu – stále budú v aristotelovskej terminológii *existenčnými* či *čiastočnými* tvrdeniami – napríklad *Niekto sa prechádza a niekto rozpráva*. Nič na tom nezmení ani to, ak to druhé „niekto“ budeme chápať anaforicky – ako odkazujúce na toho, kto je určený tým prvým „niekto“, čo môžeme vyjadriť nasledovne: *Niekto sa prechádza a ten (niekto) rozpráva.* Iba podotýkame, že takáto väzba už nie je komutatívna – vo všeobecnosti neznamená to isté ako *Niekto sa rozpráva a ten (niekto) prechádza.*

---

[11] [Egli 1993, 129 – 139].
[12] Io. Philoponus: *In Anal.Pr.* 244,1-246,14; [Mates 1953, 127]; [Hülser 1987, 1133, 4-15].

Ak neurčujúce axiómata spojíme implikatívne a druhé „niekto“ bude chápané anaforicky - ako odkazujúce na toho, kto je určený tým prvým „niekto“, tak zmenia svoju existenčnú povahu: zrazu sa stanú všeobecnými tvrdeniami. Napríklad *Ak sa niekto prechádza, tak sa (ten niekto) rozpráva* je všeobecné tvrdenie, ktorým vyjadrujeme, že ktokoľvek, kto sa prechádza, sa aj rozpráva. Nesmie nás mýliť okolnosť, že v slovenčine v druhej vete nemusíme vzťažné zámeno explicitne uviesť. Takéto implikatívne tvrdenie je pravdivé, ak každý prechádzajúci sa je aj rozprávajúcim sa alebo ak rozsah pojmu »prechádzajúci sa« je podmnožinou rozsahu pojmu »rozprávajúci sa«.

Jednoducho všeobecné tvrdenia stoici mohli vyjadrovať implikatívnym zložením dvoch pôvodne neurčujúcich viet tým, že druhé neurčité zámeno sa zmení na vzťažné zámeno, ktoré anaforicky odkazuje na hodnotu neurčujúceho zámena v antecedente. V slovenčine môžeme druhé zámeno vypustiť, čím sa jav anafory akoby ponoril pod obzor explicitného jazykového zachytenia pomocou konkrétneho slova, ale z významovej kohézie textu je zrejmý.

Priame potvrdenie toho, že stoici vyjadrovali všeobecné tvrdenia pomocou implikácie, nachádzame u Sexta:

„Profesionálni logici totiž tvrdia, že definície sa líšia od všeobecných (*katholikon*) výrokov iba slovnou konštrukciou, ale znamenajú to isté. A správne; pretože keď povieme „Človek je rozumný smrteľný živočích“ znamená to isté, ako keď povieme „Ak niečo je človekom, tak je rozumným smrteľným živočíchom“, hoci slovne sa to odlišuje“.[13]

Sextos ďalej uvádza podrobné zdôvodnenie – tak, ako všeobecné výroky, aj definície sa týkajú všetkých jednotlivých prípadov a stačí, ak by jeden zahrnutý prípad toto nespĺňal, tak by aj všeobecný výrok aj definícia boli nepravdivé. Uvádza aj iné príklady ekvivalentných všeobecných výrokov a definícií - napríklad: výrok „Z ľudí sú jedni Gréci a druhí barbari“ znamená to isté ako „Ak niekto je človekom, tak je buď Grékom, alebo barbarom“.[14]

4. 3. „Obsahovala“ stoická logika v sebe aj aristotelovskú?

Možnosť formulovať všeobecné tvrdenie otvárala stoikom cestu modelovania kategorického sylogizmu v rámci svojho systému.

Úsudok podľa:

a) modu Barbara:	b) pravidla úplného hypotetického sylogizmu:
Každý človek je živočích	Ak niekto je človekom, tak je živočíchom
Každý živočích je podstata	Ak niekto je živočíchom, tak je podstatou
-------------------------------	--
Každý človek je podstata	Ak niekto je človekom, tak je podstatou

Symbolicky:

S a M	$S(x) \rightarrow M(x)$
$\underline{\text{M a P}}$	$\underline{M(x) \rightarrow P(x)}$
S a P	$S(x) \rightarrow P(x)$

Dôkaz modu Barbara v stoickej logike formulovaného ako výrokovologické pravidlo

(Hyp.syl.) $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$

kde *A* znamená *S(x)*, *B* znamená *M(x)* a *C* znamená *P(x)*, môžeme rekonštruovať napríklad takto:

1. $A \rightarrow B, A \vdash B$ podľa prvého základného pravidla (MP)
2. $B \rightarrow C, B \vdash C$ podľa prvého základného pravidla (MP)

[13] [Sextos 1983b, *Against the Ethicists*, 8]; [Hülser 1987, 629].

[14] Cf. [Sextos 1983b, *Against the Ethicists*, 10]; [Hülser 1987, 629].

3. $A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \vdash C$ podľa log. teorémy (Th2) z 1. a 2. "eliminácia" B

4. $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$ podľa štvrtej *thema* (Th4) z 3.

Všeobecné záporné tvrdenie kategorického sylogizmu mohli stoici vyjadriť negáciou konjunkcie neurčujúcich viet s anaforickou väzbou druhého zámena na hodnotu prvého - napríklad: *Nie je pravda, že niekto sa prechádza a (ten) sa rozpráva.*

Existenčné kladné tvrdenie kategorického sylogizmu mohli vyjadriť konjunkciou neurčujúcich viet s s anaforickou väzbou druhého zámena na hodnotu prvého – napríklad: *Niekto sa prechádza a (ten) sa rozpráva.*

Existenčné záporné tvrdenie kategorického sylogizmu mohli vyjadriť konjunkciou neurčujúcej vety s negovanou neurčujúcou vetou, ktorej zámeno je anaforicky viazané na hodnotu zámena z prvej zložky konjunkcie - napríklad: *Niekto sa prechádza a nie je pravda, že sa (ten) rozpráva.*

Takže nič nestálo stoikom v ceste, aby mohli modelovať celý kategorický sylogizmus vo svojom systéme logiky, alebo inak povedané mali vybudované prostriedky na to, aby mohli formulovať všetky základné tvrdenia systému predikátovej logiky pre singulárne (monadické) predikáty. Rekonštrukciu dôkazov všetkých platných modov prvej figúry kategorického sylogizmu v stoickej logike môže čitateľ nájsť v [Gahér 2000, 249 - 253].

4. 4. Revízia základných pravidiel usudzovania

Ak predchádzajúce úvahy sú presvedčivé, tak musíme revidovať výklad stoických nedokázateľných pravidiel usudzovania prinajmenej takto:

a) MP^P	b) MT^P
$F(x) \rightarrow G(x)$	$F(x) \rightarrow G(x)$
$\underline{F(\iota)}$	$\underline{\neg G(\iota)}$
$G(\iota)$	$\neg F(\iota)$

s voľnou *indivíduovou premennou x* v implikatívnych premisách, čo je rovnocenné všeobecnej kvantifikácii týchto premenných; voľnú premennú v tomto prípade chápeme tak, že je vypustený všeobecný kvantifikátor spred celej implikácie, nie spred jej zložiek[15] - čiže anaforická viazanosť nám zabezpečuje to, čo v predikátovej logike dosahujeme napríklad postavením kvantifikátora pred zložený výrokový výraz; v druhej premise a závere vystupuje *indivíduový výraz ι* typu *pragmatickej premennej*.

Táto revízia však nie je postačujúca, pretože by nepokrývala oné všeobecné premisy nemetodických úsudkov, kde vystupovali relácie. Takže druhá revízia by spočívala vo formulovaní napríklad pravidla modus ponens pre binárne predikáty:

$R(a,b) \rightarrow T(a,b)$	$R(x,y) \rightarrow T(x,y)$
$\underline{R(a,b)}$	$\underline{R(\iota_1,\iota_2)}$
$T(a,b)$	$T(\iota_1,\iota_2)$

kde *a,b* sú indivíduové konštanty, *x,y* indivíduové premenné, ι, ι_1, ι_2 sú indivíduové výrazy typu konštanty alebo pragmatickej premennej, *R, T* sú binárne predikáty. Ani jeden záver uvedených pravidiel nie je sám osebe všeobecný.

4. 5. Formulácie všeobecných tvrdení pomocou vzťažných zámen

[15] V predikátovej logike platí pravidlo rozloženia všeobecného kvantifikátora na zložky implikácie: $(\forall x)(F(x) \rightarrow G(x)) \vdash \{(\forall x)F(x) \rightarrow (\forall x)G(x)\}$, ale neplatí obrátené pravidlo: $\{(\forall x)F(x) \rightarrow (\forall x)G(x)\} \vdash (\forall x)(F(x) \rightarrow G(x))$.

V prirodzenom jazyku nemáme presne vzaté špeciálne výrazy pre premenné, ale môžeme použitie premenných nahradiť nielen implikatívnym spojením s anaforickou viazanosťou, ale aj väzbou pomocou dvojice vzťažných zámen *ten-kto; to-čo; tí-ktorí* a pod. s kataforickou väzbou, resp. pomocou týchto dvojíc v obrátenom poradí s anaforickou viazanosťou. Veta „Ten je P, kto je S“ zodpovedá implikácii „Ak je niekto S, tak je P“. Tieto spôsoby vyjadrenia všeobecných tvrdení boli zrejme bežné v hovorovej gréčtine a stoici ho podložili svojou teóriou. Toto potvrdzuje napríklad tento úsudoku:

„Je deň; a okrem toho hovoríš, že je deň; teda hovoríš pravdu“ ktorý však je správny až potom, keď je dodaná všeobecná premisa:
„Kto o tom, čo je, hovorí, že to je, hovorí pravdu“
a k tejto sa potom ako ďalšia premisa kladie
„Kto, keď je skutočne deň, hovorí, že je deň, hovorí to, čo je.“[16]

V dnešnej symbolike by sme mohli prvý úsudok zachytiť približne takto:
(U3) $F(d), H(\iota,F(d)) \vdash T(\iota)$, resp. $[F(d) \wedge H(\iota,F(d))] \vdash T(\iota)$,[17]
kde d znamená *Je deň*, F je vlastnosť *byť faktom*, H vzťah *hovoriť o niečom, že je faktom*[18], ι je pragmatická premenná indivíduového typu, T je vlastnosť *hovoriť pravdu*. Je zrejmé, že tento úsudok nie je konkluzívny. Potrebná všeobecná premisa a druhá dodatočná premisa majú tvar:
(V1) $\{[H(x, F(\pi)) \wedge F(\pi)] \rightarrow T(x)\}$,
(V2) $\{[H(x, F(d)) \wedge F(d)] \rightarrow T(x)\}$,
kde x je indivíduová premenná, π je premenná, ktorej oborom premennosti je množina významov výrokov; predpokladáme, že fráza *hovoriť to, čo je* má ekvivalentný význam s frázou *hovoriť pravdu*; výrazom s uvedenými voľnými premennými rozumieme tak, akoby boli vynechané všeobecné kvantifikátory spred celých výrazov.
Všeobecnú a dodatočnú premisu môžeme zachytiť podľa zákona exportácie antecedentov a komutatívnosti konjunkcie ekvivalentne aj nasledovným spôsobom:
(V1*) $\{F(\pi) \rightarrow [H(x, F(\pi)) \rightarrow T(x)]\}$,
(V2*) $\{F(d) \rightarrow [H(x, F(d)) \rightarrow T(x)]\}$.
V takomto prípade dôkaz by mohol vyzerať nasledovne:
(1) $\{F(\pi) \rightarrow [H(x, F(\pi)) \rightarrow T(x)]\}, F(d) \vdash \{[H(x, F(d)) \rightarrow T(x)\}$ podľa MP^P na V1*
(2) $\{ H(x, F(d)) \rightarrow T(x)]\}, H(\iota,F(d)) \vdash T(\iota)$ podľa MP^P na V2*
(3) $\{F(\pi) \rightarrow [H(x, F(\pi)) \rightarrow T(x)]\}, F(d), H(\iota,F(d)) \vdash T(\iota)$ Th2 na 1., 2. “vynechanie” premisy $\{ H(x, F(d)) \rightarrow T(x)]\}$

Aj v tomto dôkaze sa ukazuje, že dodatočná (druhá) premisa je nadbytočná, ale keďže vystupuje v dôkaze, nespôsobuje chybnosť úsudku.

5. Ako mohli stoici overovať správnosť dôkazov v geometrii a aritmetike?

---

16 *In Anal.Pr.* 22,17-26; [Hülser 1987, 1087, 25ff].

17 Z hľadiska základného kritéria konkluzívnosti záver vyplýva z premís vtt je logicky pravdivá implikácia, ktorej antecedentom je konjunkcia premís a konzekventom je záver.

18 Nehovoríme o pravdivostnej hodnote výroku, že je *faktom*, ale o význame pravdivého výroku hovoríme, že je *faktom*. Preto výraz d nie je výrokovou premennou, ale je konštantou, ktorá zastupuje význam konkrétneho výroku (stoickú *axióma*). Preto, ak chceme hovoriť o čomkoľvek, čo je faktom, tak hovoríme o významoch výrokov, že sú pravdivé, ale nehovoríme o ich pravdivostných hodnotách. Mohli by sme vlastnosť *byť faktom* vyjadriť pomocou vzťahu *mať pravdivostnú hodnotu totožnú s*, ktorý by bol medzi výrokmi a pravdivostnou hodnotou Pravda, resp. pomocou vzťažnej vlastnosti *mať pravdivostnú hodnotu totožnú s Pravdou*. Takáto vlastnosť je formulovateľná až v metajazyku. Keďže výrok má pravdivostnú hodnotu odvodene v závislosti od svojho významu, tak či tak v skutočnosti vždy hovoríme o významoch výrokov.

5. 1. Dôkaz tranzitívnosti niektorých relácií

Aby stoici naozaj mohli overovať správnosť dôkazov v geometrii a aritmetike, museli vedieť zachytiť štandardné formulácie napríklad z Euklidových *Elementov*. Ako sme uviedli v prípade nemetodických úsudkov, tak v geometrii a aritmetike ide najčastejšie o vzťahy typu „rovnať sa“, „byť väčší než“, „byť menší ako“ a pod. Všeobecná premisa o tranzitívnosti relácií (byť väčší, byť menší, rovnať sa) býva štandardne formulovaná ako (Tr*) $[(xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz]$,
kde *R* je uvažovaná relácia, pričom všetky premenné sú viazané všeobecným kvantifikátorom, ktorý je pred celou formulou. V stoickom systéme by sa dala zachytiť ekvivalentne (oprávňuje nás k tomu zákon exportácie) ako:

(Tr) $[xRy \rightarrow (yRz \rightarrow xRz)]$

a celý úsudok nasledovne:

(U1) $\{[xRy \rightarrow (yRz \rightarrow xRz)], xRy, yRz \vdash xRz\}$.

Dôkaz:

(1) $\{[xRy \rightarrow (yRz \rightarrow xRz)], xRy, \vdash (yRz \rightarrow xRz)\}$	podľa MP^P
(2) $\{(yRz \rightarrow xRz), yRz \vdash xRz\}$	podľa MP^P
(3) $\{[xRy \rightarrow (yRz \rightarrow xRz)], xRy, yRz \vdash xRz\}$	Th2 na 1., 2. – vynechanie premisy $(yRz \rightarrow xRz)$.

5.2. Dôkaz existencie iracionálneho čísla

Je zrejmé, že taký známy a dôležitý dôkaz, akým bol dôkaz nesúmerateľnosti uhlopriečky štvorca s jeho stranou – v aritmetickej terminológii dôkaz, že $\sqrt{2}$ je iracionálne číslo, sa nedá uskutočniť vo výrokovej logike, a tobôž nie v kategorickom sylogizme. A práve tento dôkaz v geometrickej terminológii uvádza Filoponos v prehľade stoických *hypotetických sylogizmov* ako príklad úsudku na vylučujúcu disjunkciu:

(U2) „Uhlopriečka je so stranou súmerateľná alebo nesúmerateľná;
<u>ale nie je súmerateľná;</u>
teda je nesúmerateľná“.[19]

Hoci v tejto formulácii nie je uvedené slovo, ktoré by malo význam kvantitatívneho vymedzovacie zámena, predsa celý úsudok je všeobecný: hovorí o vzťahu medzi uhlopriečkou a stranou *ľubovoľného štvorca* – takže podmienka „ak niečo je štvorcom“ je na základe zrejmého kontextu elidovaná, podobne ako je elidovaný podmet v druhej zložke disjunkcie i v druhej premise a závere. Úsudok preto môžeme bez použitia elipsy (konkrétne sylepsy) parafrázovať v jeho neelidovanej podobe nasledovne:

(U2*)
Ak niečo je štvorcom, tak buď je jeho uhlopriečka s jeho stranou súmerateľná, alebo je nesúmerateľná;
<u>ale ak niečo je štvorcom, tak nie je pravda, že jeho uhlopriečka je s jeho stranou súmerateľná;</u>
teda ak niečo je štvorcom, tak jeho uhlopriečka je nesúmerateľná s jeho stranou.

Vyjadrenie všeobecného súdu pomocou implikácie s neurčitým zámenom v antecedente sa opiera o anaforické použitie vzťažného zámena v konzekvente tejto implikácie. Je to šikovný spôsob vyjadrenia v prirodzenom jazyku toho, čo v predikátovej logike vyjadrujeme pomocou indivíduových premenných.

Vo formulácii posledného úsudku vyjadruje aj zdanlivo neimplikatívna druhá premisa i záver všeobecný súd. Tomu by zodpovedala nasledujúca schéma:

---

[19] Io. Philoponus, *In Anal.pr.,* p. 245,24 ff.; [Hülser 1987, 1133, 80-85]; [Mates 1953, 129].

$Š(x) \rightarrow \{[U(y,x) \wedge S(z,x)] \rightarrow [Sú(y,z) \vee\vee N(y,z)]\}$
$\underline{Š(x) \rightarrow \{[U(y,x) \wedge S(z,x)] \rightarrow \neg Sú(y,z)\}}$
$Š(x) \rightarrow \{[U(y,x) \wedge S(z,x)] \rightarrow N(y,z)\}$,

kde *Š* je vlastnosť *byť štvorcom*, *U* je vzťah *byť uhlopriečkou ...*, *S* je vzťah *byť stranou ...*, *Sú* je vzťah *byť súmerateľný s ...*, *N* je vzťah *byť nesúmerateľný s ...* a symbol ∨∨ je znakom pre vylučujúcu disjunkciu. Táto schéma je konkluzívna pre ľubovoľnú hodnotu premenných x, y, z – jej premisy i záver sú „otvorené“ formuly – formuly s voľnými premennými, resp. akoby všeobecný kvantifikátor vďaka anaforickej viazanosti bol vždy pred celou implikáciou. Záver logicky vyplývy z premís pre ľubovoľné ohodnotenie premenných.

Mohlo by sa zdať, že prepis druhej premisy úsudku o nesúmerateľnosti
(P2) „ale nie je súmerateľná“
do jazyka predikátovej logiky
(P2*) $Š(x) \rightarrow \{[U(y,x) \wedge S(z,x)] \rightarrow \neg Sú(y,z)\}$
je veľmi násilný a "vidíme" tam oveľa zložitejšiu stavbu, ako je zachytená v prirodzenom jazyku. Vysvetlenie tohto rozdielu je založené na tom, že v prirodzenom jazyku, a najmä v jeho hovorom prejave – v reči, sa riadime princípom ekonómie vyjadrovania. Ako sme už uviedli, na splnenie tohto princípu využívame okrem intonácie najmä elidovanú formu vyjadrení a anaforu. Ak pripustíme, že vety s anaforicky použitými výrazmi (napr. zámenami), alebo dokonca vety, v ktorých sú tieto anaforicky požité výrazy vypustené, v prípadne zreťazenia do jedného významového celku – napríklad úsudku, odkazujú na vymedzenú hodnotu významu výrazu, použitého na začiatku zreťazenia alebo kontextu, tak môžeme zjednodušiť druhú premisu. Najprv ale musíme upresniť ohodnotenie premenných vzhľadom na anaforickú väzbu: všetky voľné premenné sú ohodnotené tak, aby veta (vety), v ktorej vystupuje výraz, na ktorého hodnotu sa v ďalšej časti zreťazenia odkazuje, bola pravdivá. To znamená, že úsudok by mal schému

(U2) $Š(x) \rightarrow \{\{(U(y,x) \wedge S(z,x)) \rightarrow [(Sú(y,z) \vee\vee N(y,z)) \wedge \neg Sú(y,z)]\} \vdash N(y,z)\}$,

ktorá sa už oveľa viac približuje štruktúre úsudku v prirodzenom jazyku.

V pramennej literatúre sme nenašli nejakú podobu stoického dôkazu platnosti rozhodujúcej premisy o tom, že nie je pravdou, že by strana nejakého štvorca bola súmerateľná s jeho uhlopriečkou. Podľa všetkého sa nezachovala ani podoba pôvodneho dôkazu u pytagorejcov. Rekonštruovaný stoický dôkaz v aritmetickej terminológii by zrejme mal podobu pravidla modus tollens pre predikátovú logiku (relácií):
MT^P $F(x) \rightarrow [R(x,m,n) \wedge H(m,n)]$
$\underline{\neg [R(a,m,n) \wedge H(m,n)]}$
$\neg F(a)$,
kde *x* je ľubovoľné číslo, *m* a *n* je nejaké celé, resp. prirodzené číslo a konštanta *a* označuje určité číslo. Konkrétne:
(MT^P*) $(P1_{MT})$ $Rac(x) \rightarrow [(x=m/n \wedge Nes(m,n)]$
$(P2_{MT})$ $\underline{\neg[(\surd 2=m/n \wedge Nes(m,n)]}$
(Z_{MT}) $\neg Rac(\surd 2)$
kde *Rac* je predikát *racionálny*, D je binárny predikát *nesúdeliteľné...*[20] a ostatné symboly majú štandardný význam. Premisa $(P1_{MT})$ je teoréma platná pre všetky racionálne čísla, pričom *m* je nejaké celé a *n* je nejaké prirodzené číslo. Situáciu sme trochu zjednodušili, keď sme reláciu *rovnať sa podielu* chápali ako ternárnu reláciu, a nie ako binárnu reláciu *identity*,

[20] Dve celé čísla sú nesúdeliteľné práve vtedy, keď ich najväčší spoločný deliteľ je rovný jednej.

ktorej jeden korelát je určený binárnou reláciou *podielu*. Slovne by to stoici mohli vyjadriť asi takto:

($P1_{MT}$) Ak niečo je racionálnym číslom, tak sa rovná podielu nejakého celého čísla m a prirodzeného čísla n a tieto čísla sú nesúdeliteľné.

Premisa ($P2_{MT}$) tvrdí o konkrétnom čísle $\sqrt{2}$, že nie je pravda, že pre nejaké celé číslo *m* a nejaké prirodzené číslo *n* sa $\sqrt{2}$ rovná ich podielu, pričom tieto čísla by boli nesúdeliteľné. Jej platnosť sa dá dokázať sporom – ak $\sqrt{2}$ sa rovná podielu nejakých čísel m a n, tak sa z teorém aritmetiky dá odvodiť, že čísla m a n budú súdeliteľné, t.j. ich najväčší spoločný deliteľ nie je rovný jednej, ale je väčší ako jedna. Premisa ($P2_{MT}$) by sa dala preformulovať aj na všeobecné tvrdenie pre ľubovoľné celé číslo m a ľubovoľné prirodzené číslo n: $\sqrt{2}$=m/n $\rightarrow \neg$Nes(m,n). Je známe, že stoici dobre vedeli o logickej ekvivalencii $\neg(p\wedge q) \leftrightarrow (p\rightarrow \neg q)$, a preto toto preformulovanie by im nemalo robiť problémy.

Vráťme sa k hlavnému dôkazu úsudku (U2). Ak je zrejmé, že diskusia je o uhlopriečkach a stranách štvorcov, tzn. že oba antecedenty sú pravdivé, tak dôkaz v geometrickej terminológii je nasledovný:

1. Š(x) $\rightarrow$ {(U(y,x)$\wedge$S(z,x))$\rightarrow$[Sú(y,z)$\vee\vee$ N(y,z)]}, Š(x) $\vdash$ {(U(y,x)$\wedge$S(z,x))$\rightarrow$[Sú(y,z)$\vee\vee$ N(y,z)]} MP^P
(oblasť premennosti *x* sa zužuje na štvorce);
2. {(U(y,x)$\wedge$S(z,x))$\rightarrow$[Sú(y,z)$\vee\vee$ N(y,z)]}, (U(y,x)$\wedge$S(z,x)) $\vdash$ [Sú(y,z)$\vee\vee$ N(y,z)] MP^P
(oblasť premennosti sa zužuje: *y* na uhlopriečky štvorcov; *z* na strany štvorcov);
3. Š(x) $\rightarrow$ {(U(y,x)$\wedge$S(z,x))$\rightarrow$[Sú(y,z)$\vee\vee$ N(y,z)]}, Š(x), (U(y,x)$\wedge$S(z,x)) $\vdash$[Sú(y,z)$\vee\vee$ N(y,z)] Th.2 na 1., 2.
4. [Sú(y,z)$\vee\vee$ N(y,z)], $\neg$Sú(y,z) $\vdash$ N(y,z) podľa piateho základného pravidla
5. Š(x) $\rightarrow$ {(U(y,x)$\wedge$S(z,x))$\rightarrow$[Sú(y,z)$\vee\vee$ N(y,z)]}, Š(x), (U(y,x)$\wedge$S(z,x)), $\neg$Sú(y,z) $\vdash$ N(y,z) Th.2 na 3., 4.

Tu však predpokladáme, že „dosah“ anafory je jednoznačne určený významovo spojeným zreťazením jazykových výrazov, a nesmieme druhú premisu „vytrhnúť“ z tohto významovo uzavretého kontextu. Akoby v druhej premise a závere išlo o výskyty premenných viazaných kvantifikátorom – nemôžeme za ňe v druhej premise a závere dosadzovať ľubovolne, ale môžeme uvažovať iba tie všetky ich hodnoty, pri ktorých oba antecedenty nadobúdajú pravdivostnú hodnotu pravda. Čiže významová kohézia textu je tu základný predpoklad, ktorý umožňuje takéto koncízne formulácie v prirodzenom jazyku.

7. Záver

Presne to, čo od logiky požadovali peripatetici a čo vo svojej príliš zväzujúcej logike napriek veľkému úsiliu nemohli uskutočniť, sa zrejme podarilo stoikom. Gréci mali v stoickej logike takú logiku, ktorá bola na úrovni vtedajšieho vedeckého poznania a dokázala efektívne preverovať všetky dôležité spôsoby usudzovania vrátane aritmetických a geometrických dôkazov. Posúďte sami, ako vyznieva v svetle tejto hypotézy hodnotenie najvýznamnejšieho predstaviteľa stoickej logiky Chrysippa význačným historikom logiky 19. storočia Prantla:

“Musela to byť doba hrozného úpadku a rozkladu, ktorá mohla označiť takú dutú hlavu ako bol Chrysippos za najväčšieho logika”.[21]

Katedra logiky a metodológie vied
Filozofická fakulta Univerzity Komenského
Šafárikovo nám č. 6, 818 01 Bratislava
e-mail: Frantisek.Gaher@fphil.uniba.sk

[21] [Prantl 1927, 404].

LITERATÚRA:

ANTICKÍ AUTORI:

ALEXANDER Z AFRODISIADY

1991 **On Aristotle Prior Analytics 1. 1-7**, Translated by Barnes, J.- Bobzien, S. – Flannery, K. – Ierodiakonou, K., Duckworth.

ARISTOTELES

1961 **První analytiky.** (Organon III). Preklad A. Kříž , ČSAV, Praha.

1959 **O vyjadřování**. Preklad A. Kříž, ČSAV, Praha.

1983 **Categories, On Interpretatione, Prior Analytics**. transl. H.P. Cooke, H. Tredennick (Pr.An.), Loeb.

DIOGENES LAERTIOS

1991 **Lives of Eminent Philosophers**. Translated by R.D.Hicks, Loeb.

SEXTOS EMPIRIKOS

1970 **Przeciw logikom.** Preklad I. Dąmbska, PWN.

1983 **Against the Logicians I-II**. Translated by R. G. Bury, Loeb (repr.).

1983b **Against the Physicists I-II**. **Against the Ethicists**. Translated by R.G. Bury, Loeb (repr.).

1984 **Základy pyrrhonskej skepsy**. Preklad J. Špaňár, Pravda, Bratislava.

1987 **Against the Professors I-VI**. Translated R. G. Bury, Loeb (repr.).

1993 **Outlines of Pyrrhonism I-III**. Translated by R. G. Bury, Loeb (repr.).

1994 **Outlines of Scepticism**, Annas, J. – Barnes, J (transl.), Cambridge University Press, 1994.

MODERNÍ AUTORI:

BERKA, Karel

1959 **K dějinám výrokové logiky v antice.** Rozpravy ČSAV, sešit 11, ročník 69, Praha.

DÖRING, Klaus – EBERT, Theodor (hrs.)

1993 **Dialektiker und Stoiker.** Franz Steiner Verlag, Stuttgart.

EGLI, Urs

1993 Neue Elemente im Bild der stoischen Logik, In: Döring, K. – Ebert, T. 1993, s. 129 – 140.

FREDE, Michael

1974a **Die Stoische logik.** Göttingen.

1974b Stoic vs. Aristotelian Syllogistic. In: **Archiv für Geschichte der Philosophie**, Bd.56, Heft 1., s.1–32.

FREGE, Gottlob

1964 **Begriffsschrift und andere Aufsätze**. I. Angelli (hg.), Hindelsheim – Darmstadt.

GAHÉR, František

2000 **STOICKÁ SÉMANTIKA A LOGIKA z pohľadu intenzionálnej logiky**. Stimul, Bratislava.

HAY, William H.,

1969 Stoic Use of Logic. In: **Archiv für Geschichte der Philosophie**, 12, Bd. 51.

HÜLSER, Karlheinz (Hg.)

1987 **Die Fragmente zur Dialektik der Stoiker** Bd.1-4. Stuttgart.

KAHN, Charles H.

1969 Stoic Logic and Stoic LOGOS. In: **Archiv für Geschichte der Philosophie**, 12, Bd. 51.

KNEALE, William and KNEALE, Martha

1986 **The Development of Logic**, Clarendon Press, Oxford (repr.).

ŁUKASIEWICZ, Jan

1927 O logice stoików. **Przegląd Filozoficzny**, 30, pp. 278 – 279.

1934 Z historii logiky zdań. **Przegląd Filozoficzny**, 37, pp. 369 – 377.

MATES, Benson

1953 **Stoic Logic**. University of California Publications in Philosophy, Vol.26, California Univesity Press, Berkeley and Los Angeles.

MAU, Jürgen

1957 **Stoische Logik**. Hermes, 85, 147 – 158.

MCKIRAHAN, Richard

1992 **Principles and Proofs. Aristotle´s Theory of Demonstrative Science.** Princeton.

MIGNUCCI, Mario

1993 The Stoic *Themata.* In: Döring, K. – Ebert, T. 1993, pp. 217-238.

MLÁDENEK , Ivan

1999 Charakter a funkcia axióm v Aristotelovej teórii vedeckého poznania. **Filozofia**, 54, 1999, FÚ SAV Bratislava, 1 - 13.
MUELLER, Ian
1969 **Stoic and Peripatetic Logic**. In: Archiv für Geschichte der Philosophie, 12, Bd. 51.
PRANTL, Karl
1927 **Geschichte der Logik im Abendlande**, I.b., Leipzig (zweite ausl.).